Ensino Fundamental II (Segundo Ciclo)

**A soma de Gauss**

**Disciplina(s)/Área(s) do Conhecimento:**

Matemática

**Competência(s) / Objetivo(s) de Aprendizagem:**

* Calcular a soma de uma sequência de números naturais utilizando a Soma de Gauss.

**Conteúdos:**

* A Soma de Gauss ou Padrão de Gauss.

**Palavras**-**Chave:**

* Padrões.Sequências. Padrão de Gauss. Soma de Gauss.

**Previsão para aplicação:**

2 aulas (50 min./aula).

***Para Organizar o seu Trabalho e Saber Mais:***

* Recomenda-se que o/a professor/a conheça o problema do padrão de Gauss e o mito de sua origem. Poderá verificar um pouco da técnica e conhecer o mito no seguinte link: <http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/soma-gauss.htm>

**Proposta de Trabalho:**

 **1ª Etapa:** Início de conversa

O tratamento de sequências numéricas, dos padrões numéricos e das generalizações é tópico importante do conteúdo do Ensino Fundamental II.

O objetivo desse plano de aula é apresentar ao estudante um método surpreendente de somar números naturais numa sequência, desenvolvido pelo matemático Johann Carl Friedrich Gauss no final do século XVIII.

**2ª Etapa:** Motivação dos estudantes e diagnóstico do conhecimento prévio

O/a professor/a poderá iniciar a aula partindo do seguinte desafio:

Desafio: Calcule a soma dos números naturais de 1 até 100:

1+2+3+…+98+99+100

Em 10 minutos, interromperá os estudantes e perguntará a resposta. Provavelmente, nenhum estudante conseguirá finalizar o cálculo em 10 minutos. O/a professor/a introduzirá a história do jovem Gauss e como ele resolveu esse mesmo problema de forma genial, quando ainda era uma criança.

Não se sabe ao certo se trata-se de uma história verdadeira, porém, conta-se que Gauss sempre foi bom estudante em Matemática. Certo dia, por algum comportamento inadequado da sala, o seu professor de Matemática decidiu aplicar um longo exercício durante a aula. Os estudantes seriam obrigados a calcular a soma dos números de 1 até 100. Em poucos minutos, Gauss apresentou sua resposta. Ao conferir o resultado, o professor muito surpreso, verificou que a resposta de Gauss estava correta. Como será que ele fez isso?

**3ª Etapa: A soma de Gauss**

A estratégia que Gauss utilizou foi muito inteligente, ao invés de calcular 1+2+3...+98+99+100 somando 1+2 = 3, 3+4 = 7 e assim por diante, ele teve um olhar muito aguçado. O jovem matemático decidiu analisar as somas dos pares formados pelo primeiro e último número da sequência, segundo e penúltimo número, terceiro e antepenúltimo número e assim sucessivamente. Veja o cálculo que ele obteve:

1 + 100 = 101

2 + 99 = 101

3 + 98 = 101

4 + 97 = 101

.

.

.

50+51 = 101

Gauss observou esse belo padrão, isso significa que na soma de 1 até 100 obteremos 50 vezes o número 101. Então para efetuar 1 + 2 + 3 + … + 98 + 99 + 100, basta fazer 50 x 101 que resulta em 5 050. Essatécnica é conhecida como soma de Gauss.

Uma outra forma de observar a soma de Gauss é por meio do seguinte diagrama, que pode vir a ser interessante o/a professor/a reproduzir na lousa:



Note que, como temos 100 algarismos na sequência 1, 2, 3, … , 98, 99, 100 , conseguimos formar 50 pares. Utilizando o raciocínio de Gauss, cada par, se for bem escolhido, resulta em 101. Portanto, a soma dos termos da sequência 1, 2, 3, …, 98, 99, 100 vale 50 x 101, isto é , 5050.

**4ª Etapa:** Exercitando o que foi aprendido

 Agora chegou a hora do/a professor/a oferecer aos estudantes a oportunidade de exercitar o conteúdo apresentado. Trata-se de um tópico desafiador e o suporte do/a professor/a é essencial para que o estudante consiga acompanhar cada etapa. Os exercícios abaixo poderãoser utilizados como exemplos, casoo/a professor/a sinta que a classe necessite acompanhar mais algumas vezes as ideias apresentadas previamente.

Exercício 1: Calcule a soma de todos os números de 1 até 200.

*Resposta: 20 100. Note que, utilizando a soma de Gauss, teremos 100 pares, somando 201 cada. Portanto, basta fazer 100 x 201 que resulta em 20 100.*

Exercício 2: Calcule a soma de todos os números de 1 até 300.

*Resposta: 45 150. Note que, utilizando a soma de Gauss, teremos 150 pares, somando 301 cada. Portanto, basta fazer 150 x 301 que resulta em 45 150.*

Podemos utilizar o padrão de Gauss para o caso de sequências de números naturais com uma quantidade ímpar de membros. Antes de pedir aos estudantes para pensar sobre isso, dois exemplos serão apresentados:

Exemplo: Calcule a soma de todos os números de 1 até 99.

Aqui há duas estratégias, a estratégia B é a mais interessante e menos imediata para estudantes desse ciclo. Detalhe-a e, se necessário, explore mais exemplos.

Estratégia A - Poderá somar todos os algarismos, de 1 até 98, utilizando a soma de Gauss e, em seguida, somar ao valor obtido, 99. Resultarão 49 pares, somando 99 cada. Portanto, basta fazer 49 x 99 = 4 851 e somar a isso o último elemento da sequência que faltou, isto é, 99. O resultado então é: 4 851 + 99 = 4950.

Estratégia B – Esse é o método mais interessante, pois oferece uma solução mais rápida do problema. O que se faz é somar a quantidade de elementos da sequência e dividir por dois para saber quantos pares resultarão. Então, temos 99 elementos, logo teremos 49,5 pares. O que se deve observar é que, apesar de 49,5 não ser um número inteiro, o resultado vale. Logo, para obter o resultado da soma, basta multiplicar a quantidade de pares pelo valor da soma de cada par. Nessa situação, teremos 49,5 pares, somando 100 cada, portanto, o resultado é 49,5 x 100 = 4950.

Exercício 3: Calcule a soma de todos os números de 101 até 201.

*Resposta: 45 150. Note que utilizando, a soma de Gauss, teremos 50,5 pares, somando 302 cada. Portanto, basta fazer 50,2x 302 que resulta em 15 251.*

Além de problemas desse tipo, pode ser estimulante resolver problemas utilizando esse raciocínio. Veja um exemplo:

Exemplo: Existe um tipo de rifa em que a pessoa sorteia um bilhete, que será o número com que vai concorrer e, também, quanto vai pagar por ele. Por exemplo, se o jogador sortear o bilhete número 41, pagará R$41,00 pela aposta e concorrerá com o número 41 no sorteio do prêmio. Suponha que os bilhetes a serem sorteados são numerados de 1 até 130. Qual é o valor total que pode ser arrecadado por essa rifa?

*Resposta: Basta somar todos os números de 1 até 130 utilizando a soma de Gauss. Obteremos 8515.*

Outro tipo de problema, que é resolvido utilizando também a soma de Gauss, é obtido pela variação do tipo de sequência que se considera. O/a professor/a poderá propor esse último com o caráter de desafio.

ExercícioDesafio: Calcule a soma de todos os números pares de 2 até 200.

*Resposta: 20 200. Note que, utilizando a soma de Gauss, teremos 50 pares (temos 100 números compondo essa sequência), somando 202 cada. Portanto, basta fazer 100 x 202 que resulta em 20200.*

Para encerrar a aula, poderá ser interessante concluir com um diálogo sobre quais foram as impressões desse tipo de problema. O/a professor/a irá convidar a classe para refletir sobre como as dificuldades foram superadas com a estratégia matemática adequada.

Plano de aula elaborado por Prof Me. Felipe Albino dos Santos