ENSINO MÉDIO

 **Quantidade de figurinhas necessárias para completar um álbum**

**Disciplina(s)/Área(s) do Conhecimento:**

Matemática

**Competência(s) / Objetivo(s) de Aprendizagem:**

* Estudar o *Problema do colecionardor de cupons* da Teoria das Probabilidades;
* Trabalhar a ideia de modelagem matemática;
* Deduzir fórmulas matemáticas;
* Efetuar cálculo médio aproximado da quantidade de figurinhas necessárias para completar um álbum.

**Conteúdos:**

* Combinatória;
* Probabilidade;
* Logaritmo natural;
* Estatística;
* Gráficos de função logarítmica.

**Palavras**-**Chave:**

Matemática. Probabilidade. Copa. Figurinhas. Colecionador de cupons.

**Previsão para aplicação:**

3 aulas (50 minutos/aula).

**Para Organizar o seu Trabalho e Saber Mais:**

* Uma leitura simplificada sobre o tema pode ser encontrada no artigo *“Quantas figurinhas comprar para completar o álbum da Copa?, Paulo Cezar Pinto Carvalho em Revista do Professor de Matemática.* Disponível em: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/73/10.html> . Último acesso: 22 de Maio de 2018.
* Uma leitura motivadora para os alunos: *“Quanto se gasta para completar o álbum da Copa”.* Disponível em: <https://super.abril.com.br/blog/oraculo/quanto-se-gasta-para-completar-o-album-da-copa/> . Último acesso: 22 de Maio de 2018.
* Para entender sobre como utilizar o *Problema do colecionador de cupons,* confira o trabalho: *“Álbuns de figurinhas: uma modelagem do problema do colecionador de cupons”* de Flávia Freitas Maia, Rafael Garcia Barbastefano e Dayse Haime Pastore. Disponível em: <http://www.lematec.net.br/CDS/XIIICIAEM/artigos/1323.pdf> . Último acesso: 22 de Maio de 2018.
* Referência teória: Feller, W. - Introdução à teoria de probabilidades e suas aplicações.

**Proposta de Trabalho:**

 **1ª Etapa:** Início de conversa

 Com o início das vendas de álbuns de figurinha da Copa do Mundo FIFA, é comum ver nos corredores das escolas, na hora do intervalo, alunos de todas as idades exibindo as figurinhas e seus álbuns que, ao longo de várias semanas, foram preenchidos. Nessa época, ouve-se as mais diversas teorias sobre as temidas figurinhas repetidas e, também, estratégias para evitá-las. Porém, é difícil encontrar um bom argumento matemático para essas conclusões. Então, por que não aproveitar esse momento para introduzir uma importante teoria da probabilidade?

 Para despertar interesse nos alunos e iniciar a conversa, o/a professor/a poderá mediar um diálogo a partir das seguintes perguntas:

1. *Alguém coleciona ou conhece algum colecionador?*
2. *Alguém coleciona ou conhece algum colecionador de cupons e/ou figurinhas?*
3. *Alguém está colecionando ou já colecionou o álbum de figurinhas da Copa do Mundo?*
4. *Alguém sabe dizer quanto se gasta para completar um álbum até o final, levando em conta as figurinhas repetidas?*

2ª Etapa: Compreendendo o processo de compras de figurinhas

Por se tratar de um fenômeno aleatório, ou seja, uma experiência cuja realização depende do acaso, o gasto com um álbum de figurinhas deve ser estudado como um problema que envolve a linguagem probabilística. Sendo assim, pode-se mudar a pergunta para:

*“Em média, quantas figurinhas é preciso comprar para completar o álbum?”*

Para que seja possível responder essa pergunta, é preciso ter claras algumas considerações:

1. *todas as figurinhas são impressas na mesma quantidade;*
2. *o número de figurinhas impressas é suficientemente grande para poder considerar que as figurinhas obtidas em cada compra são independentes das obtidas nas demais;*
3. *as figurinhas repetidas não serão trocadas;*
4. *as figurinhas são compradas individualmente, ou seja, cada pacote contém uma única figurinha.¹*

¹ Embora as figurinhas usualmente sejam compradas em pacotes com várias figurinhas, a última hipótese facilita a análise, sem modificar de modo essencial os resultados.

Nessa etapa, é muito importante que estejam claros os motivos pelos quais as quatro considerações acima devem ser tomadas como requisito necessário para o estudo.

3ª Etapa: O Problema do Colecionador de Cupons

Nessa etapa, para solucionar o caso das figurinhas do álbum, o/a professor/a aplicará a técnica de modelagem matemática, isso só será possível porque os cálculos para esse problema podem ser generalizados para o caso do Colecionador de Cupons.

**O Problema do Colecionador de Cupons** é conhecido na Teoria das Probabilidades (Feller, 1968). Seu objetivo é definir quantas unidades o colecionador deve adquirir para completar a coleção.

**Resumindo o caso:**

Suponha que um procedimento seja repetidamente executado, de modo que, em cada realização, tenha uma probabilidade ***p*** de ser bem sucedido (0 < p < 1). Como descobrir o número médio de tentativas até obter sucesso?

Considere que as tentativas frustradas têm probabilidade igual a *1-p*, já que tentativas bem sucedidas têm probabilidade *p*. Sabemos que todas as tentativas são independentes e que:

*- para que o sucesso ocorra na n-ésima tentativa, basta que ocorram n-1 tentativas frustradas, seguidas por uma bem sucedida;*

*- multiplicando as probabilidades, temos a possibilidade do primeiro sucesso ocorrer:*

 Sabemos que um resultado aleatório pode assumir valores , com probabilidades , . Definimos seu valor médio (ou esperado) como *m =*

Portanto, o número médio de tentativas até o primeiro sucesso será:

Podemos escrever a mesma soma com coeficientes iguais a 1:

Agora, cada linha tem a soma infinita de uma progressão geométrica de razão (*1-p).* Somando os resultados de cada linha, temos:

Mais uma vez, a soma dos termos de uma progressão geométrica de razão (1-p), resulta em:

**Encontrando a fórmula:**

Suponha que o álbum tenha um total de **N** figurinhas e que já tenhamos **n** figurinhas no álbum, sendo assim, é possível fazer um cálculo de probabilidade simples. Sabemos que:

* é a probabilidade da compra de uma figurinha resultar em uma figurinha repetida;
* a probabilidade da compra resultar em uma figurinha nova é *p* = .
* Segundo (I), o número médio de tentativas até se obter a próxima figurinha nova é:

Para terminar, é preciso pensar no preenchimento do álbum como algo que acontecerá em N etapas:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| n=0 | n=1 | n=2 | ... | n=N-2 | n=N-1 |
|  |  |  | ... |  |  |

Logo,

 )

Ou seja, o número médio de figurinhas será o número total de figurinhas N, multiplicado pelo fator ).

4ª Etapa: Aplicando a fórmula encontrada

Para realizar essa etapa, o/a professor/a poderá contar com o auxílio de uma planilha eletrônica para gerar o cálculo do fator ). Ou, caso julgue possível, poderá mostrar que tal fator é da ordem de **,** através do gráfico do logaritmo neperiano, gerando a fórmula aproximada .

Aplicando a fórmula encontrada para o caso do álbum de figurinhas da **Copa do Mundo FIFA Rússia 2018**, que tem um total de 682 figurinhas, conclui-se que, em média, deve-se comprar aproximadamente

 4450 figurinhas.²

² Quantidade encontrada a partir das considerações feitas no início do estudo.

Plano de aula elaborado por Professora Amanda Oliveira Calazans