Ensino Médio

**Sequências e Progressão Aritmética**

**Área do Conhecimento:**

Matemática

## **Competência(s) / Objetivo(s) de Aprendizagem:**

* Conhecer os conceitos de sequência numérica e progressão aritmética;
* Identificar a lógica existente em sequências numéricas;
* Trabalhar com progressões aritméticas.

## **Conteúdos:**

* Sequência numérica;
* Progressão Aritmética.

## **Palavras-Chave:**

* Sequências Numéricas. Progressão Aritmética.

## **Previsão para aplicação:**

5 aulas (50 min/aula).

## **Materiais Relacionados:**

* Para rever o conteúdo de sequências numéricas e progressão aritmética:

<https://brasilescola.uol.com.br/matematica/sequencia-numerica.htm>

<https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/sequencia-numerica.htm>

<https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/progressao-aritmetica.htm>

<https://www.todamateria.com.br/progressao-aritmetica/>

Acesso em: 24 de novembro de 2019.

* Sobre a sequência de Fibonacci e Gauss:

<https://super.abril.com.br/mundo-estranho/o-que-e-a-sequencia-de-fibonacci/>

<https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/soma-gauss.htm>

<https://pt.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss>

Acesso em: 30 de novembro de 2019.

* Para aprofundar o conteúdo de sequências e progressão aritmética:

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. Fundamentos de Matemática Elementar: Sequências, Matrizes, Determinantes, Sistemas. Vol 4. São Paulo: Atual, 1996.

**Proposta de Trabalho:**

**1ª Etapa: Sequências numéricas**

Na primeira etapa os alunos conhecerão os conceitos de sequência e sequência numérica, que servirão de base para o conteúdo de Progressão Aritmética, temas que são comumente abordados no primeiro ano do Ensino Médio.

Sequência é um conjunto no qual seus elementos estão dispostos em determinada ordem. No caso de uma sequência numérica, seus elementos são números. Observe os exemplos de sequências numéricas:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... – sequência de números naturais;

0, 2, 4, 6, 8, 10, ... – sequência de números naturais pares;

2, 3, 5, 7, 11, 13, ... – sequência de números primos.

O conteúdo de sequências numéricas é uma oportunidade para trabalhar junto aos alunos a capacidade de identificar lógicas e padrões. Apresente algumas sequências e coloque como desafio a tarefa de descobrir qual é o elemento seguinte. Seguem alguns exemplos que podem inicialmente serem resolvidos em conjunto com a turma:

11, 17, 23, 29

3, 12, 48,

30, 28, 25, 21, 16

Em seguida, passe uma lista de exercícios para que os estudantes resolvam em duplas. A atividade é a mesma, deverão descobrir qual o elemento seguinte de cada sequência numérica. Seguem algumas possibilidades:

18, 25, 32, 39

22, 26, 31, 37

31, 39, 34, 42, 37

Inclua outro exercício, cada dupla deverá criar duas sequências numéricas. Este tipo de atividade contribui para que alunos exercitem a criatividade e o pensamento matemática ao utilizarem o raciocínio para criar novas lógicas. Após terem terminado, discuta as respostas encontradas.

Comente, como curiosidade, sobre a sequência de Fibonacci. Cada elemento dela é formado pela soma dos dois elementos anteriores: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Por estar relacionado com diversos fenômenos da natureza, obras de arte e outros conteúdos matemáticos, possui grande importância na Matemática.

Por fim, passe um desafio final para os alunos: Qual o próximo elemento da sequência abaixo?

2, 10, 12, 16, 17, 18, 19

Esta já foi uma questão de vestibular e é bem raro que alguém perceba que se trata da sequência dos números que começam com a letra “D” e, portanto, o número seguinte é 200.

**2ª Etapa: Progressão aritmética – Cálculo de um termo qualquer**

Na segunda etapa, os alunos irão conhecer o conceito de Progressão Aritmética (PA), que é uma sequência numérica na qual a diferença de elementos (ou termos) consecutivos é sempre a mesma. Essa diferença é chamada de razão da progressão aritmética. Geralmente colocamos progressões dentro de parênteses. Observe os exemplos que seguem:

a. (5, 9, 13, 17, 21)

A razão desta PA é 4 e ela possui 5 termos. Pelo fato da razão ser positiva, dizemos que é uma progressão crescente.

b. (12, 5, -2, -9, ...)

A razão desta PA é -7 e as reticências ao fim indicam que é uma progressão de infinitos termos. Pelo fato da razão ser negativa, dizemos que é uma progressão decrescente.

Passados os conceitos iniciais, é interessante seguir o conteúdo a partir de problemas práticos. O exercício abaixo foi feito a partir de uma questão do ENEM de 2011:

1) O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33.000 passagens; em fevereiro, 34.500; em março, 36.000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes. Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado?

No exemplo, nota-se que o número de passagens vendidas aumenta na forma de PA. De um mês para o outro aumenta em 1500 passagens. O primeiro mês vendeu 33.000; para encontrar a quantidade do segundo mês soma-se 1.500; para encontrar a quantidade de passagens vendidas no terceiro mês soma-se 1.500 novamente, e assim por diante.

A partir desse raciocínio pode-se entender a fórmula geral para encontrar um termo qualquer de uma PA. Para encontrar um termo qualquer *an* de ordem *n*, basta somar ao valor do primeiro termo *a1* o valor *r* da razão *n – 1* vezes.

$$a\_{n}=a\_{1}+\left(n-1\right)r$$

Voltando ao exemplo, para encontrar o valor de passagens vendidas no mês 7, basta pegar a quantidade vendida no primeiro mês e somar ao valor da razão seis vezes.

$$a\_{n}=a\_{1}+\left(n-1\right)r$$

$$a\_{7}=34500+\left(7-1\right)x1500$$

$$a\_{7}=42000$$

Portanto, em julho, foram vendidas 42 mil passagens.

Para reforçar o entendimento, recomenda-se alguns exercícios, preferencialmente questões contextualizadas. Se considerar conveniente, pode-se organizar os alunos em duplas. Seguem algumas possibilidades:

2) Camila, para praticar algum exercício físico, deu 7 voltas na praça na segunda-feira. Na terça, deu 13 voltas e na quarta deu 17 voltas. Se ela continuar aumentando o número de voltas no mesmo ritmo, quantas voltas dará no domingo?

3) Jorge comprou um carro zero no valor de R$ 32.500,00. Ele verificou que o carro desvaloriza 870 reais por ano. Qual será o valor do carro após 11 anos?

4) Um funcionário de determinada, empresa em sua primeira semana de trabalho, elaborou 13 relatórios. Na semana seguinte, elaborou 19, e na terceira semana fez 25. Se manter esse ritmo, quantos relatórios ele fará na 23ª semana?

**3ª Etapa: Progressão aritmética – Soma dos termos**

Para deixar o conteúdo seguinte mais interessante, pode-se contar um pouco da vida de Gauss. Johann Carl Friedrich Gauss é considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos, tendo contribuído em diversas áreas desta e de outras Ciências.

Quando tinha dez anos, na escola, um professor passou um desafio para os alunos: deveriam encontrar a soma de todos os números de 1 à 100. O professor ficou muito surpreso, pois Gauss encontrou o resultado muito rapidamente, que é 5050.

Ele encontrou a resposta de forma rápida porque percebeu que se somasse o primeiro com o último número (1+100); o segundo com o penúltimo (2+99); o terceiro com o antepenúltimo (3+98); sempre encontra o mesmo valor, no caso 101. Com isso, multiplica-se 101 pela metade da quantidade de termos, nesse caso 50, assim, 101x50 = 3030.

Esta é a base do raciocínio da fórmula que usamos para calcular a soma dos *n* primeiros termos de uma PA. A soma *S* dos *n* primeiros termos de uma PA é a soma do primeiro termo com o último, multiplicada pela metade do número de termos:

$$S=\left(a\_{1}+a\_{n}\right)\frac{n}{2}$$

Para que os alunos pratiquem, pode-se utilizar os exercícios vistos na etapa anterior:

2) Camila, para praticar algum exercício físico, deu 7 voltas na praça na segunda-feira. Na terça, deu 13 voltas e na quarta deu 17 voltas. Se ela continuar aumentando o número de voltas no mesmo ritmo, quantas voltas dará no domingo?

3) Jorge comprou um carro zero no valor de R$ 32.500,00. Ele verificou que o carro desvaloriza 870 reais por ano. Qual será o valor do carro após 11 anos?

Para finalizar, peça para que os estudantes elaborem um exercício contextualizado utilizando PA.

**Plano de aula elaborado pelo Professor** **Aroldo Alves**